《第３講　積分評価》

5　a を自然数とする.

(1)　すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)　$a\geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ.

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3)　級数の極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ.

6　各自然数 n に対して，初項 $n-1$，公差 2 の等差数列を考える．この等差数列の最初の n 項の和を a_n とする．以下の問いに答えよ．

(1)　a_n を n の式として表せ.

(2)　自然数 $k \geqq 1$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の和

$$S(k)=\sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k の式として表せ.

(3)　$S(k)$ を(2)で定めた和とする．次の等式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

を示せ.

《第３講　積分評価》

5　a を自然数とする．

(1)　すべての自然数 n について，次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)　$a\geqq 2$ のとき，次の等式が，すべての自然数 n について成立するような定数 b と c を求めよ．

$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{a-1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

(3)　級数の極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$$

について，収束するならばその極限値を求め，発散するならばこれを証明せよ．

【答】 (1)　略　　(2)　$b=1$，$c=-1$

(3)
$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}=\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!} & (a\geqq 2 \text{ のとき})\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} \text{ は発散する．} & (a=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

【解説】 (1)　$k(k+1)\cdots(k+a-1)$

$$=\frac{1}{a+1}\{k(k+1)\cdots(k+a-1)(k+a)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+a-1)\} \text{ より}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+a-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+1}\{k(k+1)\cdots(k+a-1)(k+a)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+a-1)\}$$

$$=\frac{1}{a+1}n(n+1)\cdots(n+a)$$

(2)
$$\frac{b}{n(n+1)\cdots(n+a-2)}+\frac{c}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}=\frac{b(n+a-1)+cn}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

$$=\frac{(b+c)n+b(a-1)}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$$

なので，$(b+c)n+b(a-1)$ がすべての n に関して $a-1$ と等しくなるので，

$a-1\geqq 1$ より

$$b+c=0 \text{ かつ } b(a-1)=a-1 \quad \therefore\ b=1,\ c=-1$$

(3)　$a \geqq 2$ のとき，(2)より

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+a-1)}\right\}\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a-1}\left\{\frac{1}{(a-1)!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+a-1)}\right\}\\
=\ &\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!}
\end{aligned}
$$

$a=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

であるが，k を 1 以上の整数とするとき $k<x$ において $\dfrac{1}{k}>\dfrac{1}{x}$ より

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$ つまり $\displaystyle\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$ となるので

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &> \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\\
&= \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\\
&= \Big[\log x\Big]_1^{n+1}\\
&= \log(n+1)\ \to\ \infty\ \ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

よって $a=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}$ は発散する．

以上より
$$
\begin{cases}
\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}=\frac{1}{(a-1)\cdot(a-1)!} & (a\geqq 2\text{ のとき})\\
\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+a-1)}\ \text{は発散する．} & (a=1\text{ のとき})
\end{cases}.
$$

6　各自然数 n に対して，初項 $n-1$，公差 2 の等差数列を考える．この等差数列の最初の n 項の和を a_n とする．以下の問いに答えよ．

(1)　a_n を n の式として表せ.

(2)　自然数 $k \geqq 1$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の和

$$S(k)=\sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k の式として表せ.

(3)　$S(k)$ を(2)で定めた和とする．次の等式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

を示せ.

【答】 (1)　$2n(n-1)$　　(2)　$\frac{2}{3}(k-1)k(k+1)$　　(3)　略

【解説】 (1)　初項 $n-1$，公差 2 より第 n 項は $(n-1)+(n-1)\times 2=3(n-1)$ となるので

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n\times\{(n-1)+3(n-1)\}}{2} \\ &= 2n(n-1) \end{aligned}$$

(2)　$a_n=2n(n-1)$ より

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{n=1}^{k} 2n(n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{k}\frac{2}{3}\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\} \\ &= \frac{2}{3}(k-1)k(k+1) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)} &= \sum_{k=2}^{m}\frac{3k}{2(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left\{2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}-\frac{3}{2}\right\} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

ここで $k<x<k+1$ のとき $\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$ より

$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$ つまり $\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ が成り立つので

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{m-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-1<\int_1^{m}\frac{1}{x}dx<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\quad\cdots①$$

となる. $\displaystyle\int_1^m \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^m=\log m$ と①より $\displaystyle\log m+\frac{1}{m}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}<\log m+1$

以上より

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{m\log m}\right)-\frac{1}{\log m}\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right)\\
<\quad&\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}\\
<\quad&\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\log m}\right)-\frac{1}{\log m}\left(\frac{3}{4m(m+1)}+\frac{9}{8}\right)
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\log m}\sum_{k=2}^{m}\frac{k^2}{S(k)}=\frac{3}{2}$$

が示された.